Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

COURS DE :

STATIQUE DES FLUIDES

Par : Imad El Bojaddaini

Filière : CP2

Année Universitaire : 2019/2020

Sommaire :

Avant-propos

Ce cours est strictement dédié aux étudiants du Cycle Préparatoire 2 de l'ENSA d'AlHoceima. Au contraire du cours de mécanique des fluides, celui-ci contient seulement la partie statique qui étudie un fluide au repos. Toutes les notions liées à la dynamique des fluides comme l'équation de continuité, le théorème de Bernoulli, le théorème d'Euler, …, ne seront pas prises en considération dans ce cours.

Imad El Bojaddaini

1. Introduction

1.1 Définition d'un fluide

La matière existe en général sous deux états physiques à savoir l'état **solide** et l'état **fluide**.
Un **fluide** est un corps physique sans rigidité dont une des principales propriétés est de subir de grandes déformations sous l'action des forces extérieures aussi petites que l'on veut. Cette propriété dite **fluidité**, est due à une grande mobilité des particules fluides.
Contrairement au solide qui a une forme propre, un fluide ne possède pas de forme propre et il prend la forme du récipient qui le contient parce que les particules (atomes ou molécules) constituant un fluide sont libres de s'écouler ou de se déplacer les unes par rapport aux autres.
Alors qu'un solide se déplace en bloc ou se déforme (petites déformations) tout en gardant une structure cohérente, un fluide **s'écoule** et on parle de **l'écoulement du fluide**.
Cette différence de comportement entre les fluides et les solides trouve son explication au niveau moléculaire. En effet, les forces de cohésion entre les particules d'un solide sont plus importantes que celles qui sont entre les particules d'un fluide.

Parmi les fluides, on distingue les liquides et les gaz :

- Un **liquide** (l'eau, l'huile…) n'a pas de forme propre, mais il a un volume propre. Il adopte la forme du récipient qui le contient.

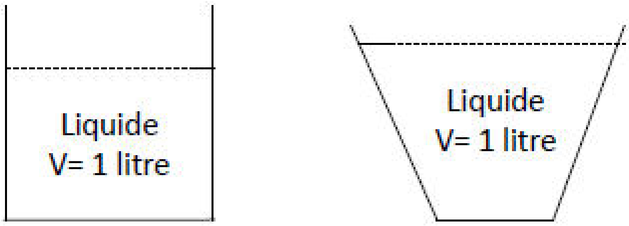

Fig. 1.1

Un liquide est un fluide incompressible. Il ne se comprime pas car les atomes ou les molécules qui le composent sont proches les uns des autres (en contact étroit); on ne peut les rapprocher plus qu'ils le sont.

Fig. 1.2

Lorsqu'un liquide est en contact avec l'air (l'atmosphère), la surface de contact est une surface horizontale appelée la **surface libre**.

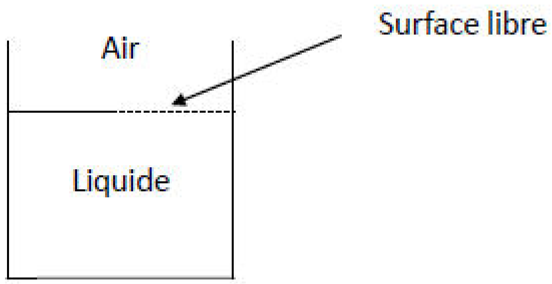

Fig. 1.3

La pression sur cette surface libre est égale à la pression atmosphérique: P = 1 atmosphère,

avec 1 atmosphère = 1,013 bar = $1{,}013.10^5$ Pascal.

- Un **gaz** (l'air, la vapeur, …) n'a ni forme propre ni volume propre. Une masse *m* du gaz occupe toujours tout le volume disponible.

Fig. 1.4

Un gaz est un fluide compressible, car les molécules qui le composent sont très distantes les unes des autres et il est facile de les forcer à occuper un volume plus petit en augmentant la pression externe.

Fig. 1.5

Remarque : un plasma, qui est un gaz ionisé, est le quatrième état de la matière faisant suite, dans l'échelle des températures, aux trois états classiques : solide, liquide et gaz.

1.2 Mécanique des fluides

La mécanique des fluides est une branche de physique qui étudie le comportement des fluides au repos (statique des fluides) et en mouvement (dynamique des fluides). Elle détermine l'état d'un fluide (vitesse, température, pression, masse volumique…) en chaque point de l'espace où évolue ce fluide et éventuellement en fonction du temps.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans plusieurs domaines comme l'aéronautique, l'ingénierie navale, biomécanique, la météorologie, l'océanographie et la climatologie….

1.3 Ecoulement d'un fluide

L'état d'un fluide au repos ou en mouvement est décrit mathématiquement par des grandeurs physiques scalaires et vectorielles telles que la vitesse, la pression, la température, la masse volumique (ou densité). Ces grandeurs varient généralement, à un même instant, d'un point à l'autre du fluide, comme elles peuvent varier aussi avec le temps.

Il existe différents types d'écoulements: écoulement unidimensionnel, bidimensionnel, tridimensionnel, uniforme, permanent, laminaire et turbulent.

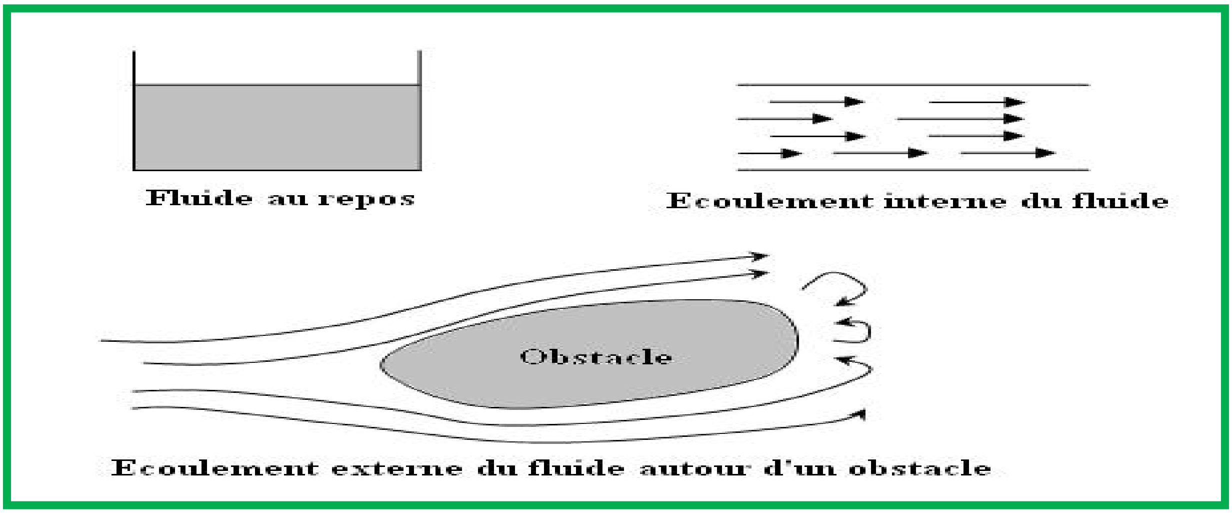

Fig. 1.6

1.3.1 Ecoulement unidimensionnel :

Les variables de l'écoulement du fluide ne dépendent que d'une seule coordonnée de l'espace et éventuellement le temps. Elles sont donc les mêmes en tout point d'une section.

1.3.2 Ecoulement bidimensionnel ou plan :

Les variables de l'écoulement dépendent de deux coordonnées de l'espace et éventuellement le temps.

1.3.3 Ecoulement tridimensionnel ou spatial :

Les variables de l'écoulement dépendent des trois coordonnées de l'espace et éventuellement le temps.

1.3.4 Ecoulement uniforme :

Un écoulement est dit uniforme à un instant si les grandeurs physiques (pression, température, vitesse ,masse volumique) ne dépendent pas des coordonnées de l'espace.

1.3.5 Ecoulement permanent ou stationnaire :

Un écoulement est dit permanent (ou stationnaire) si les grandeurs physiques représentatives sont indépendantes du temps, elles ne dépendent que des coordonnées de l'espace. Dans le cas contraire il est dit non permanent ou instationnaire.

1.3.6 Ecoulement laminaire et turbulent :

L'écoulement est laminaire lorsque le déplacement du fluide se fait suivant des droites parallèles disposées en couches. Il est dit turbulent lorsqu'il se déplace d'une manière désordonnée en formant des tourbillons de tailles différentes accompagnés d'un mélange ou brassage très intensif des particules fluides.

1.4 Fluide compressible et fluide incompressible

1.4.1 Fluide incompressible :

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée de ce fluide ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, …).

1.4.2 Fluide compressible :

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée de ce fluide varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles (l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, …).

1.5 Caractéristiques physiques des fluides

1.5.1 Masse volumique :

Soit $M(x, y, z)$ un point du fluide entouré par un élément de volume dV.

La masse volumique du fluide, au point M, est définie par :

$$\rho(M) = \frac{dm}{dV},$$

où dm est la masse totale de toutes les molécules contenues dans le volume dV. C'est une mesure de la concentration de la matière (masse) par unité de volume. Son unité est kg/m^3.

Remarque : la masse volumique ρ dépend en général de la pression P et de la température T, donc $\rho = \rho(P, T)$. Dans la suite, on va s'intéresser seulement aux cas isothermes ($T = cte$), donc $\rho = \rho(P)$.

- Dans le cas d'un fluide incompressible (liquide), le volume V occupée par une masse m de ce fluide ne varie pas avec la pression extérieure P :

$$\forall\, P, \rho = \frac{m}{V} = cte \Rightarrow \rho = cte.$$

<u>Exemples</u> : $\rho_{eau} = 10^3\, kg/m^3$, $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3\, kg/m^3$.

- Dans le cas d'un fluide compressible (gaz), la loi $\rho = \rho(P)$ peut être déterminée expérimentalement sous forme empirique. Elle aussi être déterminée théoriquement, par exemple, par la loi des gaz parfait : $PV = nRT \Rightarrow \rho = \frac{m}{nRT} P$.

1.5.2 Densité :

La densité est définie par :

$$d = \frac{masse\ volumique}{masse\ volumique\ d'un fluide\ de\ référence} = \frac{\rho}{\rho_{réf}}$$

- Dans le cas des liquides, on prendra l'eau comme fluide de référence.
- Dans le cas des gaz, on prendra l'air comme fluide de référence.

<u>Exemples</u> : $d_{liquide} = \frac{\rho_{liquide}}{\rho_{eau}} \Longrightarrow d_{eau} = 1, d_{Hg} = 13.6$

1.5.3 Poids volumique :

Le poids volumique est donnée par :

$$\omega = \frac{m.g}{V} = \rho.g$$

où g est l'accélération de la pesanteur. Le poids volumique ω est exprimé en N/m^3.

1.5.4 Viscosité :

La viscosité est une caractéristique des fluides quand ils sont en mouvement. Elle caractérise la résistance du fluide à l'écoulement, elle est causé par le frottement entre particules fluide lors du mouvement et elle provoque une dissipation de l'énergie cinétique qui est transformée en chaleur. Alors, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement.

On peut préciser cet aspect qualitativement par l'expérience suivante :

Un fluide est disposé entre deux plaques solides, planes et parallèles. On fixe l'une et on fait animer la deuxième d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{V}$ (voir Fig. 1.7).

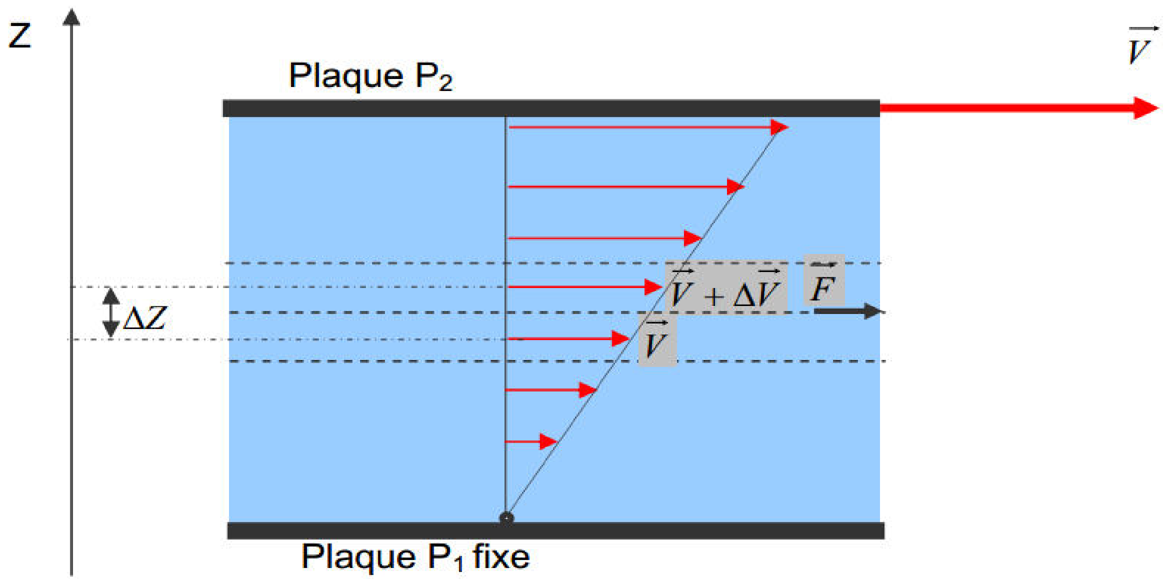

Fig. 1.7

Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultat du glissement des couches du fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est fonction de la distance z. La vitesse des particules de fluide situées sur une verticale varie alors entre 0 sur la paroi fixe et $\vec{V}$ sur la paroi mobile. Il existe donc un gradient de vitesse $\frac{dV}{dz}$ dans la direction perpendiculaire à $\vec{V}$. Cette variation de la vitesse suivant la verticale est due aux forces de frottements entre les différentes couches du liquide.

On distingue la viscosité dynamique et la viscosité cinématique.

1.5.4.1 Viscosité dynamique :

Considérons deux couches de fluides adjacentes distantes de Δz. La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches ΔV, à leur surface S et inversement proportionnelle à Δz :

$$F = \mu . S . \frac{\Delta V}{\Delta z}$$

Le facteur de proportionnalité μ est appelé viscosité dynamique. Elle est exprimée en $kg/m.s$

Remarque 1 : dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde : $1\ Pa.s = 1\ kg/m.s$.

Remarque 2 : dans le cas où $\mu = 0$, on parle d'un fluide non visqueux ou idéal ou parfait.

1.5.4.2 Viscosité cinématique :

Elle est donnée par :

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$$

Son unité est m^2/s.

Remarque 1 : on utilise souvent le Stockes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique. $1\ St = 10^{-4}\ m^2/s$.

Remarque 2 : la viscosité des fluides dépend en grande partie de leur température.

1.6 Statique des fluides

La statique des fluides est la science qui étudie les conditions d'équilibre des fluides au repos. Quand le fluide est un liquide (eau par exemple), la théorie est appelée l'hydrostatique.

Dans la statique des fluides, nous nous intéressons aux cas des fluides en équilibre dans un repère. Ceci implique que les particules fluides ont une vitesse nulle dans ce repère, il n'y a donc aucun mouvement (relatif) des particules fluides les unes par rapport aux autres et par conséquent il n'y a pas de forces de frottement (pas de viscosité). Alors, les forces surfaciques qui agissent sur les surfaces délimitant un élément de volume de fluide se réduisent uniquement aux forces de pression et s'exercent perpendiculairement à ces surfaces.

Ainsi, les seules forces qui s'exercent sur un élément de volume de fluide sont les forces volumiques (en général le poids) et les forces de pression.

Les lois de la statique des fluides s'appliqueront aussi bien au fluides parfaits qu'au fluides réels au repos(l'effet de la viscosité est très négligeable).

2. Forces exercées sur un volume de fluide

2.1 Types des forces

Soit un volume dV de fluide, limité par une surface S pris d'un fluide en écoulement (Fig. 2.1).

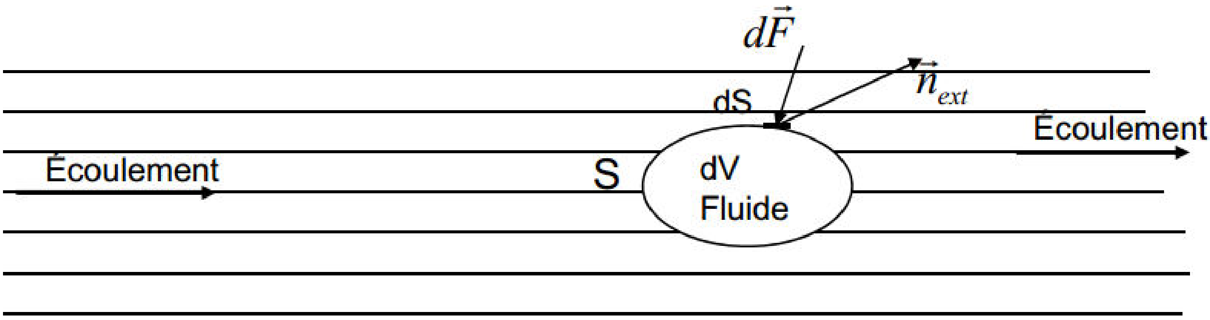

Fig. 2.1

Ce volume dV de fluide subit deux types de forces extérieures :

- **Forces volumiques (ou massiques) :** telles que le poids, les forces électromagnétiques. Ces forces sont liées directement au volume. Par exemple, le poids volumique infinitésimal dV est $\rho\vec{g}dV$ où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur et ρ la masse volumique.
- **Forces surfaciques :** ce sont des forces exercées sur le volume dV par le reste du fluide à travers la surface externe S.
  Soit un élément de surface infinitésimal dS de la surface S, orienté par un vecteur unitaire $\vec{n}_{ext}$ dirigé vers l'extérieur de dV ($\vec{n}_{ext} \perp dS$). Le fluide extérieur exerce sur l'élément de surface dS :
  - Une force de pression perpendiculaire à dS:
    $$d\vec{F}_P = -P\, dS\, \vec{n}_{ext}$$
    La force de pression totale sur la surface S est :
    $$\vec{F}_P = \int -P\, dS\, \vec{n}_{ext}$$
  - Une force de frottement (force de viscosité) parallèle à dS :
    $$d\vec{F}_{visc} = \vec{\tau}\, dS$$
    où $\vec{\tau}$ est une force de frottement par unité de surface. Sur la surface totale S on a :
    $$\vec{F}_{visc} = \int d\vec{F}_{visc}$$
    Ainsi, la force surfacique exercée sur dS est :
    $$d\vec{F} = d\vec{F}_P + d\vec{F}_{visc} = (-P\, \vec{n}_{ext} + \vec{\tau}\,)\, dS = \vec{T}(M)\, dS$$
    où $\vec{T}(M)$ est un vecteur contrainte au point M (une force divisée par une surface). Si le fluide est au repos $d\vec{F}_{visc} = \vec{0}$, alors $d\vec{F} = -P\, \vec{n}_{ext}\, dS$.

2.2 Fluide parfait et fluide réel

2.2.1 Fluide parfait :

Soit un système fluide dont le volume est délimité par une surface Σ (voir Fig. 2.2) :

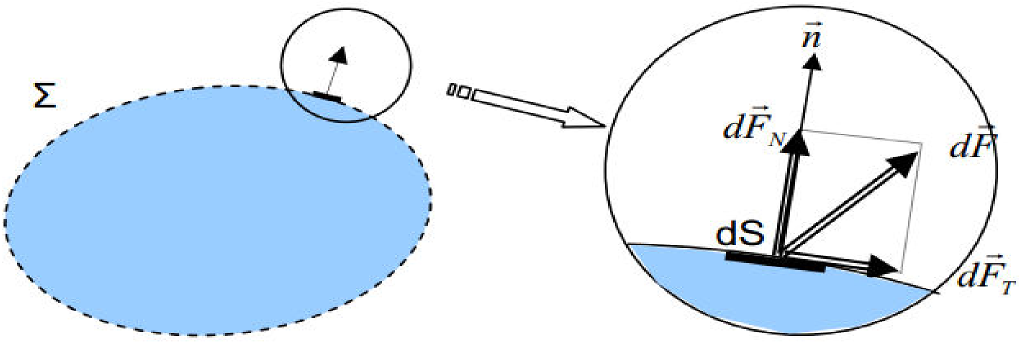

Fig. 2.2

Sur l'élément de surface dS une force $d\vec{F}$ est appliquée par le reste du fluide. Elle composée d'une partie $d\vec{F}_N$ normale à la surface (force de pression) et d'une partie $d\vec{F}_T$ tangentielle à la surface (force de frottement ou de viscosité).

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. Dans ce cas la composante $d\vec{F}_T$ est nulle.

2.2.2 Fluide réel :

Contrairement à un fluide parfait qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparait lors du mouvement du fluide.

Remarque : lorsque le fluide est au repos (en équilibre), le fluide réel se comporte comme un fluide parfait. Les forces de contact dans ce cas sont normales aux éléments de surface. La statique des fluides réels se confond avec celle des fluides parfaits.

3. Pression en un point d'un fluide

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface.

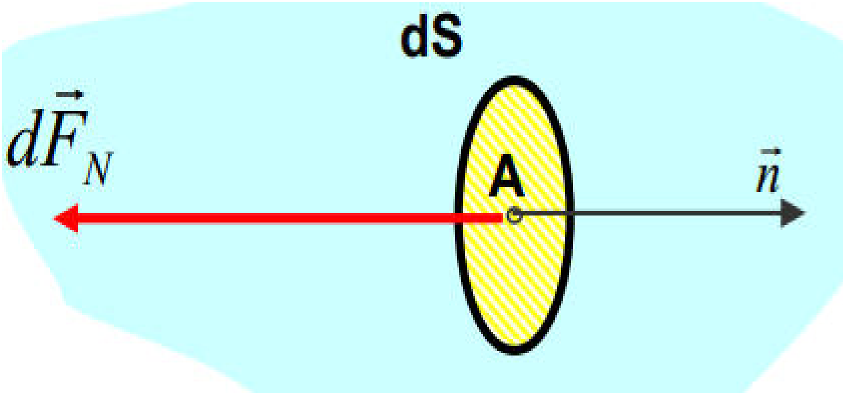

Fig. 3.1

Elle est définie en un point A du fluide par l'expression suivante :

$$P_A = \frac{\|d\vec{F}_N\|}{dS}$$

où $d\vec{F}_N$ est la composante normale de la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface dS.

Sur la surface de centre A, d'air dS, orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$ (voir Fig. 3.1), la force de pression élémentaire s'exprime par :

$$d\vec{F}_N = -P_A\, dS\, \vec{n}$$

La pression en un point M d'un fluide au repos est identique dans toutes les directions. En effet, considérons un élément de volume de fluide, entourant le point M, sous la forme d'un prisme triangulaire de largeur $dy = 1$ et de dimensions dx et dz (voir Fig. 3.2).

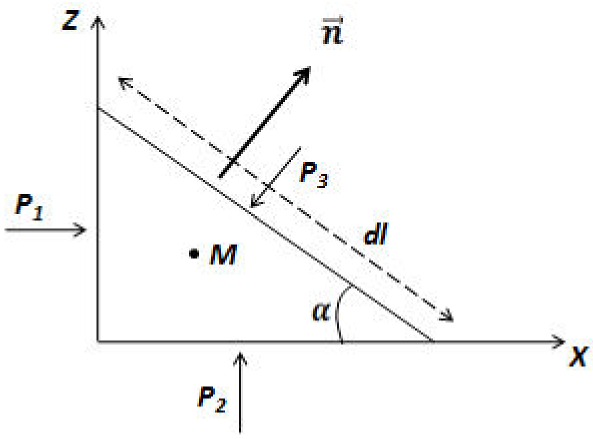

Fig. 3.2

L'élément de volume est en équilibre sous l'action des forces :

- Poids : $\vec{P} = dm\,\vec{g} = \rho\,dV\,\vec{g} = \rho\,\frac{dx\,dz}{2}\,dy\,\vec{g}$
- Forces de pression :

$$\vec{F}_1 = P_1\,dz\,dy\,\vec{x}, \qquad \vec{F}_2 = P_2\,dx\,dy\,\vec{z} \qquad et \qquad \vec{F}_3 = -P_3\,dl\,dy\,\vec{n}$$

avec $\vec{n} = \sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha\,\vec{z}$, $dx = dl\cos\alpha$ et $dz = dl\sin\alpha$.

La somme de ces forces est nulle puisque le fluide est en équilibre (au repos) :

$$\rho\,\frac{dx\,dz}{2}\,dy\,\vec{g} + P_1\,dz\,dy\,\vec{x} + P_2\,dx\,dy\,\vec{z} - P_3\,dl\,dy\,\vec{n} = \vec{0}$$

En remplaçant $\vec{n}$ par son expression et dy par 1 on trouve :

$$\rho\,\frac{dx\,dz}{2}\,\vec{g} + P_1\,dz\,\vec{x} + P_2\,dx\,\vec{z} - P_3\,dl\sin\alpha\,\vec{x} - P_3\,dl\cos\alpha\,\vec{z} = \vec{0}$$

En faisant la projection sur l'axe $\vec{x}$ on obtient :

$$P_1\,dz - P_3\,dl\sin\alpha = 0$$

$$P_1\,dz - P_3\,dz = 0$$

D'où : $P_1 = P_3$.

En faisant la projection sur l'axe $\vec{z}$ maintenant, on obtient :

$$-\rho\,\frac{dx\,dz}{2}\,g + P_2\,dx - P_3\,dl\cos\alpha = 0$$

$$-\rho\,\frac{dx\,dz}{2}\,g + P_2\,dx - P_3\,dx = 0$$

$$-\rho\,\frac{dz}{2}\,g + P_2 - P_3 = 0$$

Alors : $P_2 = P_3 + \frac{1}{2}\,\rho\,g\,dz$

Si on fait tendre l'élément de volume vers 0, donc $dz = 0$, on aura finalement :

$$P_1 = P_3 = P_2$$

On peut donc conclure qu'en un point M donné du fluide au repos, la pression est la même dans toutes les directions.

Remarque : si on ne fait pas tendre dz vers 0, on ne peut pas obtenir cette égalité. Ceci est due au fait que la pression dépend de la pesanteur (de l'axe $\vec{z}$). C'est ce qu'on verra plus tard dans la loi fondamentale de l'hydrostatique.

4. Relation fondamentale de l'hydrostatique

Soient un fluide au repos et un élément de volume dV de ce fluide de masse volumique ρ sous forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions dx, dy et dz (voir Fig. 4.1).

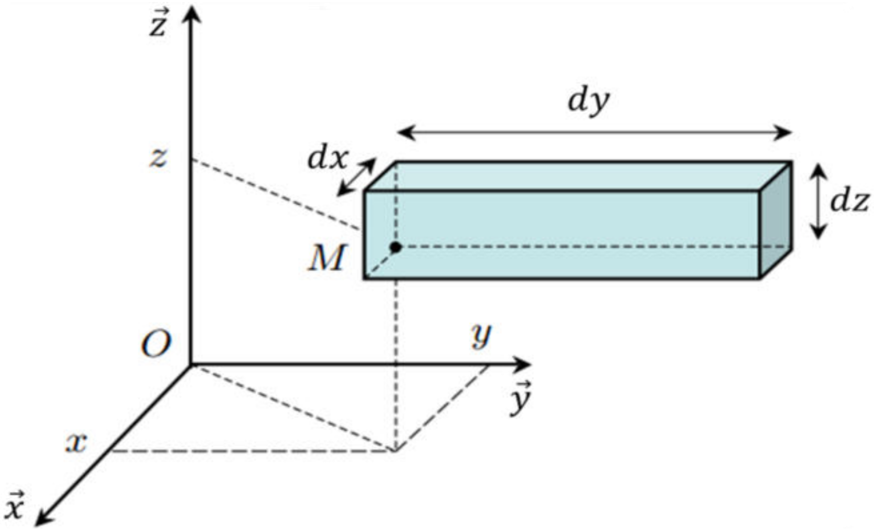

Fig. 4.1

Les forces exercées sur cet élément de volume sont :

- Le poids : $\rho\ dV\ \vec{g} = -\rho\ g\ dV\ \vec{z} = -\rho\ g\ dx\ dy\ dz\ \vec{z}$.
- Les forces de pression :
  - Force de pression sur la facette située dans le plan d'abscisse $x + dx$:
    $$F_1 = -P(x + dx)\ dy\ dz\ \vec{x}$$
  - Force de pression sur la facette située dans le plan d'abscisse x :
    $$F_2 = P(x)\ dy\ dz\ \vec{x}$$
  - Force de pression sur la facette située dans le plan d'ordonnée $y + dy$:
    $$F_3 = -P(y + dy)\ dx\ dz\ \vec{y}$$
  - Force de pression sur la facette située dans le plan d'ordonnée y :
    $$F_4 = P(y)\ dx\ dz\ \vec{y}$$
  - Force de pression sur la facette située dans le plan de cote $z + dz$:
    $$F_5 = -P(z + dz)\ dx\ dy\ \vec{z}$$
  - Force de pression sur la facette située dans le plan de cote z :
    $$F_6 = P(z)\ dx\ dy\ \vec{z}$$

L'élément de volume du fluide étant à l'équilibre, et la somme de toutes les forces est donc nulle. Alors :

$$-\rho\ g\ dx\ dy\ dz\ \vec{z} - P(x + dx)\ dy\ dz\ \vec{x} + P(x)\ dy\ dz\ \vec{x} - P(y + dy)\ dx\ dz\ \vec{y} + P(y)\ dx\ dz\ \vec{y} - P(z + dz)\ dx\ dy\ \vec{z} + P(z)\ dx\ dy\ \vec{z} = \vec{0}$$

En projetant cette équation sur l'axe $\vec{x}$ et en divisant par $dx\ dy\ dz$, on obtient :

$$-\frac{P(x + dx) - P(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

En effectuant le même raisonnement suivant les axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$, on trouve :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad et \qquad \rho g + \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Ainsi, on aboutit finalement à l'équation vectorielle suivante :

$$\boldsymbol{\rho \vec{g} - \overrightarrow{grad}P = \vec{0}}$$

Il s'agit de la relation fondamentale de l'hydrostatique. En résumé, elle est définit par :

$$\rho \vec{g} - \overrightarrow{grad}P = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}P = \rho \vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

A partir de ces trois équations de la statique des fluides, on déduit que la pression P ne dépend pas de x et y, elle ne dépend que de z : $P = P(z)$. Alors, tout les point du fluide appartenant à une surface horizontale ont la même pression. Cette surface horizontale, c'est-à-dire le plan (x, y), est appelée surface isobare.

On a : $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Longrightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g$, d'où :

$$\boldsymbol{dP = -\rho g \, dz}$$

où la quantité ρg est le poids volumique du fluide.

Remarque : si l'axe $\vec{z}$ est dirigé vers le bas (dans le même sens de $\vec{g}$), la relation fondamentale de l'hydrostatique devient :

$$\boldsymbol{dP = +\rho g \, dz}$$

En intégrant la relation fondamentale de l'hydrostatique $\boldsymbol{dP = -\rho g \, dz}$, on obtient :

$$\boldsymbol{\int dP = -\int \rho g \, dz}$$

Cette relation est valable pour les liquides et les gaz. On distingue alors deux cas :

- Si le fluide est un gaz (fluide compressible), ρ n'est pas constante et il faut en tenir compte pour intégrer. La masse volumique ρ peut être liée à la pression P par l'intermédiaire de l'équation d'état. Pour un gaz parfait on a :$\rho = \frac{m}{nRT} P$.
- Si le fluide est un liquide (fluide incompressible), ρ est constante :

$$\int dP = -\rho g \int dz \Longrightarrow P = -\rho g z + cte$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{P + \rho g z = cte}$$

Ainsi, quelque soient deux points A et B d'un fluide incompressible au repos, on a :

$$\boldsymbol{P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B = cte}$$

Variation verticale de la pression :

Soient deux points M et N de cotes respectives z_M et z_N, appartenant au même fluide incompressible au repos de masse volumique ρ.

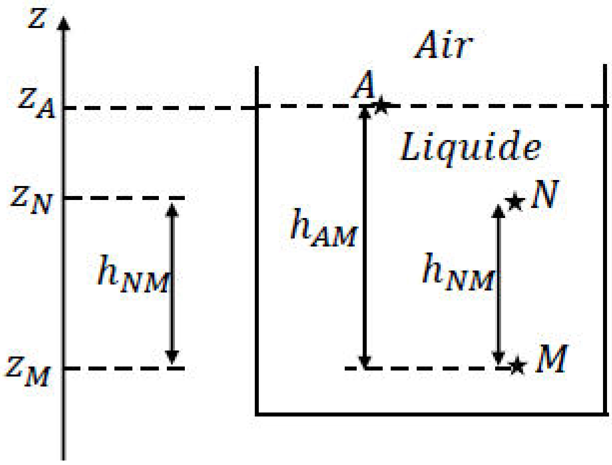

Fig. 4.2

On a : $dP = -\rho g\ dz$

En intégrant entre M et N, on aura :

$$\int_{P_N}^{P_M} dP = -\rho g \int_{z_N}^{z_M} dz$$

$$\Longrightarrow P_M - P_N = -\rho g(z_M - z_N)$$

Donc :

$$\boldsymbol{P_M - P_N = \rho g(z_N - z_M) = \rho g h_{NM}}$$

Ainsi, la variation de la pression entre deux niveaux est proportionnelle à la différence de hauteur entre ces deux niveaux. Cette variation est linéaire.

Alors quelque soit un point M du fluide :

$$\boldsymbol{P_M = P_{atm} + \rho g(z_A - z_M) = P_{atm} + \rho g h_{AM}}$$

Cette relation permet de calculer la pression en tout point du liquide, si on connait la pression atmosphérique et la profondeur de ce point par rapport à la surface libre. Alors, plus on descend vers le bas, plus la pression augmente.

5. Théorème de Pascal

5.1 Enoncé :

Toute variation de pression en un point d'un fluide incompressible en équilibre, se transmet entièrement en tout point du fluide.

5.2 Démonstration :

Soit un fluide incompressible en équilibre et soient P_1 et P_2 les pressions respectivement au points $C_1(z_1)$ et $C_2(z_2)$ du fluide.
Supposant qu'au point C_1 on a une variation de pression et celle-ci devient $P_1 + \Delta P_1$ et au point C_2 on a de même $P_2 + \Delta P_2$. Calculons alors, la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en C_2. En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique entre $C_1(z_1)$ et $C_2(z_2)$:

- A l'état initial : $P_1 - P_2 = -\rho g(z_2 - z_1)$ (1)
- A l'état final : $(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = -\rho g(z_2 - z_1)$ (2)

En faisant la différence entre les équations (1) et (2), on obtient :

$$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0 \Longrightarrow \Delta P_1 = \Delta P_2$$

6. Théorème d'Archimède

6.1 Enoncé :

Tout corps plongé dans un fluide, reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale vers le haut, dont l'intensité est égale au poids du volume du fluide déplacé (ce volume est égale au volume immergé du corps) :

$$\boldsymbol{F_{Arch} = \rho_{fluide} \times V_{imm} \times g}$$

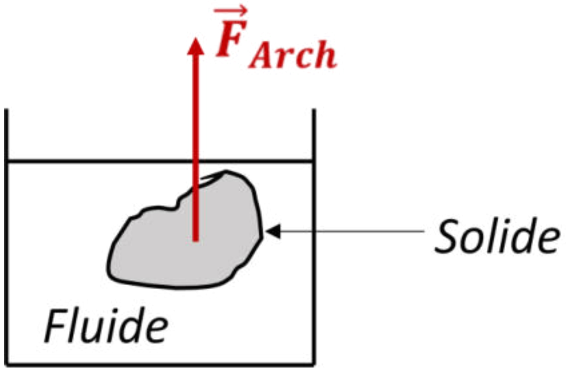

Fig. 6.1

6.2 Démonstration :

On cherche l'effort exercé sur le corps immergé, c'est-à-dire la force totale exercée par le fluide sur le corps qui occupe le volume V totalement entouré par le fluide.
On sait que cette force s'exprime par :

$$\vec{F} = \iint -P.\vec{n}.dS$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire en tout point de la surface S qui limite le volume V, orienté vers le milieu qui agit.
La formule du gradient, rappelée ci-dessous, permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume pour une fonction f quelconque :

$$\iint f.\vec{n}.dS = \iiint \overrightarrow{grad}f.dV$$

Dans le cas présent, il vient :

$$\vec{F} = \iiint -\overrightarrow{grad}P.dV$$

Or, l'équation fondamentale de la statique des fluides permet d'écrire $\overrightarrow{grad}P = \rho\vec{g}$, d'où :

$$\vec{F} = \iiint -\rho\vec{g}.dV$$

En supposant que g est constante sur tout le volume V :

$$\vec{F} = \vec{g}\iiint -\rho.dV = -\rho V\vec{g}$$

où ρV est la masse du fluide déplacé par le volume solide.
La poussée $\vec{F}$ n'a pas de composante horizontale et sa composante verticale est égale et opposée au poids du fluide déplacé par le corps (c'est la poussée d'Archimède).

D'où :

$$F = F_{Arch} = \rho_{fluide}\, V_{imm}\, g$$

Il faut noter que la poussée d'Archimède est appliquée au centre de gravité du fluide déplacé (centre de poussée), c'est-à-dire au centre de gravité de la **partie immergée** du solide. Le centre de poussée est donc en général différent du centre de gravité du solide immergé où s'applique son poids. En effet, si le solide est totalement immergé dans le fluide, le centre de poussée coïncide avec le centre de gravité du solide. Si par contre le solide est partiellement immergé, les deux centres sont différents.

Remarque :

- Si $F_{Arch} > P \Longrightarrow \rho_{fluide} > \rho_{solide}$ alors le corps solide flotte sur la surface du fluide.
- Si $F_{Arch} < P \Longrightarrow \rho_{fluide} < \rho_{solide}$ alors le corps solide descend au fond du fluide.
- Si $F_{Arch} = P \Longrightarrow \rho_{fluide} = \rho_{solide}$ alors le corps solide est en équilibre au sein du fluide.

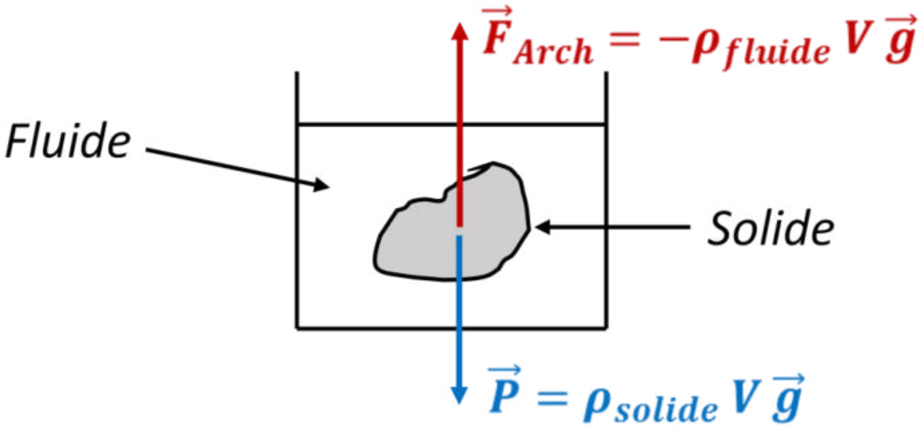

Fig. 6.2

7. Forces de pression sur les parois et centre de poussée

7.1 Paroi plane en position inclinée :

Soit une paroi solide plane rectangulaire de dimensions a et b et de surface S inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontal et immergée dans un fluide incompressible (liquide) au repos comme le montre Fig. 7.1. Cette paroi sépare deux milieux : le liquide et l'air.
Appelons Oxy le plan parallèle et confondu avec la paroi, et cherchons à déterminer la force de pression (intensité, point d'application et direction) subie par la paroi de la part du liquide et de l'air. Choisissons le point O sur la surface libre et l'axe Oz dirigé vers le bas et faisons l'étude suivant la direction Ox.

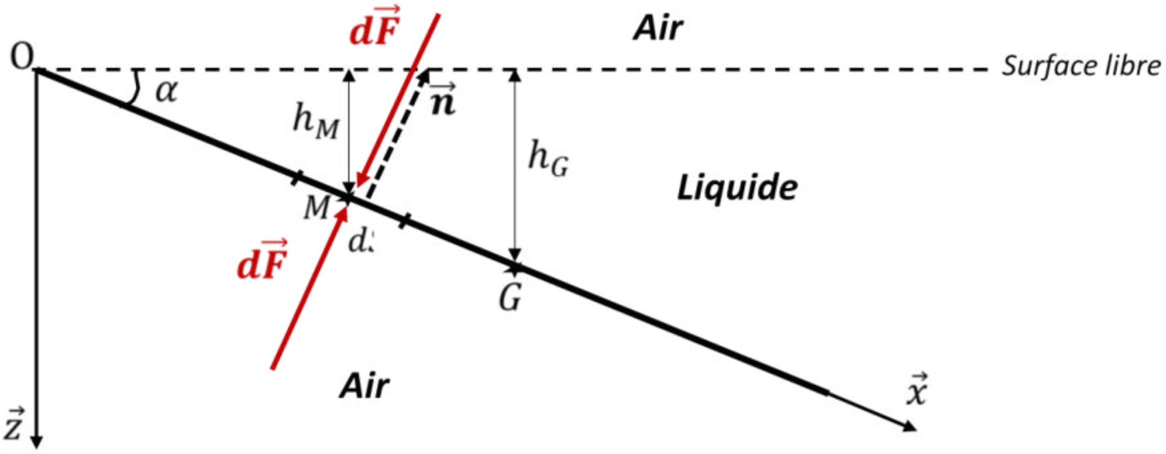

Fig. 7.1

Soit dS un élément de surface de la paroi entourant un point $M(x)$, situé à la profondeur $z_M = h_M$ au dessous de la surface libre, et soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à dS et dirigé vers le liquide.
Cet élément dS est soumis aux deux forces élémentaires $d\vec{F}_1$ et $d\vec{F}_2$, normales à dS et de sens opposés :

- $d\vec{F}_1 = P_{atm}\,\vec{n}\,dS$: une force exercée par l'air.
- $d\vec{F}_2 = -P_M\vec{n}\,dS$: une force exercée par le liquide.

où P_M est la pression du liquide en contact avec dS et P_{atm} la pression atmosphérique.

D'après la relation fondamentale de l'hydrostatique, on a :

$$P_M = P_{atm} + \rho g h_M$$

Ce qui donne :

$$d\vec{F}_2 = -(P_{atm} + \rho g h_M)\,\vec{n}\,dS$$

D'où la force de pression totale exercée sur l'élément de surface dS :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = P_{atm}\vec{n}\,dS - (P_{atm} + \rho g h_M)\,\vec{n}\,dS = -\rho g h_M\vec{n}\,dS$$

Or, on a : $\sin\alpha = \frac{h_M}{OM} = \frac{h_M}{x} \Longrightarrow h_M = x\sin\alpha$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{d\vec{F} = -\rho g x \sin\alpha\, \vec{n}\, dS}$$

La force résultante agissant sur toute la surface solide S de la paroi est donnée par :

$$\vec{F} = \iint d\vec{F} = -\rho g \sin\alpha \iint x\, \vec{n}\, dS$$

Le vecteur $\vec{n}$ est le même quelque soit la position de dS le long de la paroi.

L'intégrale $\frac{1}{S}\iint x\, dS$ représente la coordonnée x_G du centre de gravité G de la surface solide de la paroi suivant la direction Ox. Ainsi, on a :

$$\vec{F} = -\rho g\, S\, x_G\, \sin\alpha\, \vec{n}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\vec{F} = -\rho\, g\, h_G\, S\, \vec{n}}$$

où S est l'air de la paroi et h_G la profondeur de son centre de gravité G. On remarque que l'expression de $\vec{F}$ représente le poids d'une colonne verticale de liquide de base S et de hauteur h_G.

Sachant que pour une paroi rectangulaire, on a $S = a.b$ et $h_G = \frac{a}{2}\sin\alpha$:

$$\vec{F} = -\rho g\, \frac{a^2.b}{2} \sin\alpha\, \vec{n}$$

Centre de poussée :

On appelle centre de poussée, le point d'application de la résultante $\vec{F}$ sur la paroi.

Soit P ce point d'application et x_p sa coordonnée. Pour trouver ce point, on va écrire que le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O est égale à la somme des moments des forces élémentaires $d\vec{F}$ par rapport au même point :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \iint \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}$$

D'une manière scalaire, cette relation s'écrit :

$$x_p\, F = \iint x\, dF$$

Or, on a : $dF = \rho g x \sin\alpha\, dS$ et $F = \rho g h_G S$.

Alors : $x_p\, \rho g h_G S = \iint x \rho g x \sin\alpha\, dS \Longrightarrow x_p\, h_G S = \sin\alpha \iint x^2 dS$

L'intégrale $\iint x^2 dS$ représente le moment quadratique de la paroi solide par rapport à son axe Oy. Ce moment quadratique ne dépend que de la géométrie de la paroi :

$$I_{Oy} = \iint x^2 dS$$

En plus, on a $\sin\alpha = \frac{h_G}{x_G}$. On déduit alors, la coordonnée x_P du centre de poussée P sous la forme :

$$\boldsymbol{x_P = OP = \frac{I_{Oy}}{S\,x_G}}$$

Pour une paroi rectangulaire, on a $S = a.b,\ x_G = \frac{a}{2}$ et $I_{Oy} = \frac{a^3.b}{3}$, alors :

$$x_P = \frac{2}{3}a$$

On conclut que le centre de poussée est situé toujours au dessous du centre de gravité $(x_P > x_G)$.

7.2 Paroi plane en position verticale :

Considérons une paroi plane rectangulaire de dimensions a et b et de surface $S = a.b$, immergé verticalement dans un liquide au repos. Supposons que la limite supérieure de la paroi coïncide avec la surface libre du liquide.

Considérons l'axe Oz dirigé vers le bas, dont l'origine O appartient à la surface libre (voir Fig.7.2).

Dans ce cas, on a $\alpha = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\alpha = 1$ et $h_M = x = z$ où M est un point de la paroi.

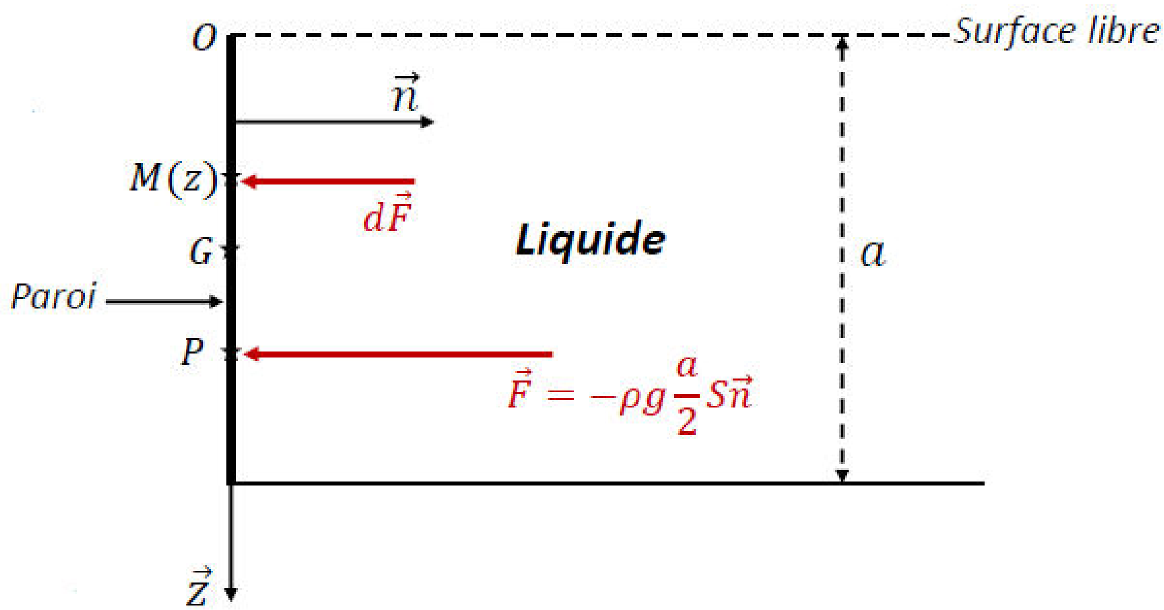

Fig. 7.2

La force de pression exercée sur toute la surface de la paroi est donnée par :

$$\vec{F} = \iint d\vec{F} = -\rho g h_G S\,\vec{n}$$

Or, dans ce cas $h_G = OG = \frac{a}{2}$, d'où :

$$\vec{F} = -\rho g \frac{a}{2} S\,\vec{n} = -\rho g \frac{a^2 b}{2}\,\vec{n}$$

Cette force totale de pression est appliquée au point P (centre de poussée) tel que :

$$OP = \frac{2}{3} a$$

7.3 Paroi plane en position horizontale :

On considère une paroi plane rectangulaire de surface S immergée horizontalement dans un liquide au repos, à une profondeur H par rapport à la surface libre. L'exemple le plus simple est le fond horizontal d'un vase rempli d'eau (Fig. 7.3).

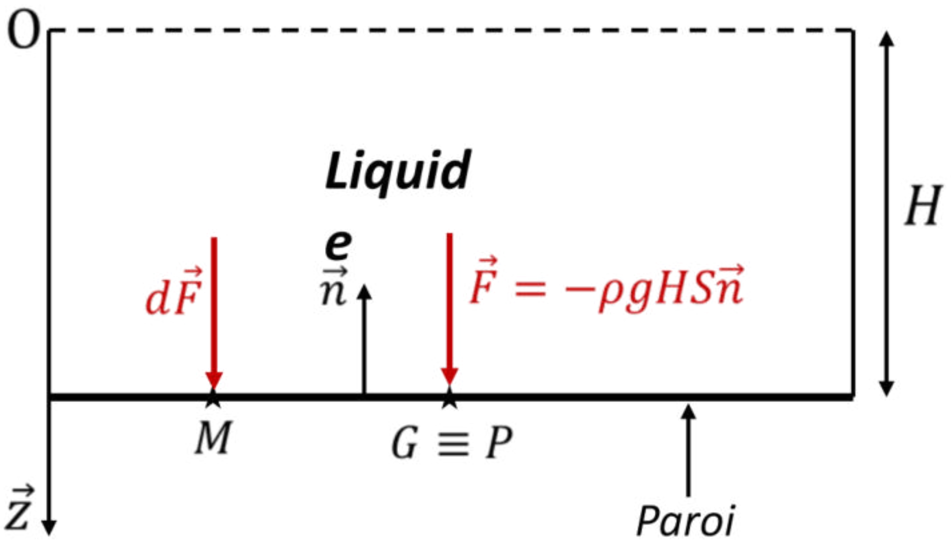

Fig. 7.3

Dans ce cas, tout les points M de la paroi sont situés à la même profondeur $h_M = H$.

La force de pression exercée sur un élément de surface dS entourant un point M est donc :

$d\vec{F} = -\rho g h_M\,\vec{n}\,dS = -\rho g H\,\vec{n}\,dS$ avec $\vec{n} = -\vec{z}$.

La force de pression résultante exercée sur toute la surface de la paroi est donnée par la relation :

$$\vec{F} = \iint d\vec{F} = -\rho g h_G S\,\vec{n} = -\rho g H S\,\vec{n}$$

Elle représente le poids d'une colonne verticale de liquide de base S et de hauteur H.

Remarque : cette force de pression est indépendante de la forme géométrique du vase. Quelle que soit la forme des vases (voir Fig. 7.4), s'ils sont rempli d'un liquide de même nature à la même hauteur H et s'ils ont un fond de même surface S, ce fond subie donc la même force de pression, alors que les vases ne contiennent pas la même quantité du liquide.

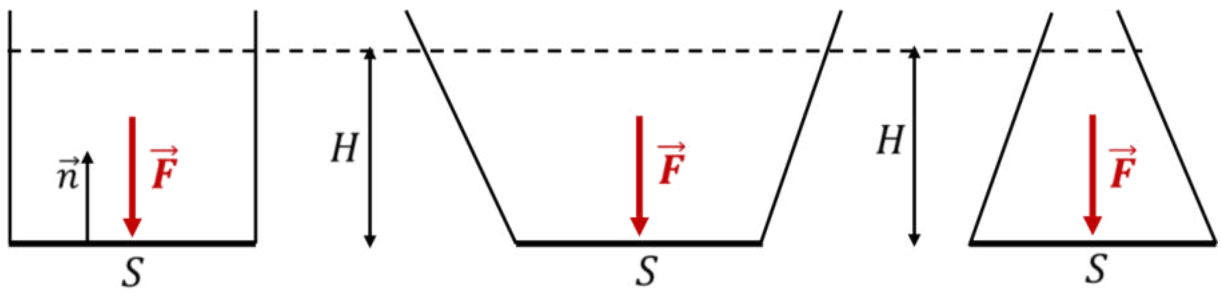

Fig. 7.4

La section S subie la même force de pression $\vec{F}$ dans les trois cas, bien que la quantité du fluide n'est pas la même. La force $\vec{F}$ ne dépend que de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur H et de la surface S.

Calculons le centre de poussée dans ce cas :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \iint \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F} \Longrightarrow x_P\ F = \iint x\ dF \Longrightarrow x_P\ \rho g H S = \rho g H \iint x\ dS$$

$$\Longrightarrow x_P\ S = \iint x\ dS \Longrightarrow x_P = \frac{1}{S} \iint x\ dS$$

D'où :

$$x_P = x_G$$

Ainsi, le centre de poussée P est confondu, dans ce cas, avec le centre de gravité G.